EJERCICIOS

1. Dibujar las curvas de nivel y las gráficas de las funciones siguientes:
   a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to x - y + 2$
   b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to x^2 + 4y^2$
   c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to -xy$

2. Describir, según varía c, el comportamiento de la curva de nivel $f(x, y) = c$ para cada una de las funciones:
   a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ b) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ c) $f(x, y) = x^3 - x$

3. Para las funciones de los Ejemplos 2.2, 2.3 y 2.4 calcular la sección de la gráfica según el plano
$$S_\theta = \{(x, y, z) \mid y = x \tan \theta\}$$
para una *constante* dada θ. Para ello, expresar z como una función de r, donde $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$. Determinar cuál de estas funciones f tiene la propiedad de que la forma de la sección $S_\theta \cap$ gráfica es independiente de θ.

En los ejercicios del 4 al 10, trazar las curvas de nivel (en el plano xy) para la función dada f y los valores de c especificados. Dibujar la gráfica de $z = f(x, y)$.

4. $f(x, y) = 4 - 3x + 2y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.
5. $f(x, y) = (100 - x^2 - y^2)^{1/2}$, $c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$.
6. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
7. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
8. $f(x, y) = 3x - 7y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.
9. $f(x, y) = x^2 + xy$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.
10. $f(x, y) = x/y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.

En los ejercicios del 11 al 13, dibujar o describir las superficies de nivel y una sección de la gráfica de cada función.

11. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \to -x^2 - y^2 - z^2$.
12. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \to 4x^2 + y^2 + 9z^2$.
13. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \to x^2 + y^2$.

En los ejercicios del 14 al 18, describir la gráfica de cada función, calculando algunos de sus conjuntos de nivel y algunas de sus secciones.

14. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \to xy$.
15. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \to xy + yz$.
16. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \to xy + z^2$.

17. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to |y|$.
18. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to \max(|x|, |y|)$.

Dibujar o describir las superficies de $\mathbb{R}^3$ de las ecuaciones de los ejercicios 19 al 31.

19. $4x^2 + y^2 = 16$.
20. $x + 2z = 4$.
21. $z^2 = y^2 + 4$.
22. $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
23. $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}$.
24. $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1 + \dfrac{x^2}{16}$.
25. $z = x^2$.
26. $y^2 + z^2 = 4$.
27. $z = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9}$.
28. $y^2 = x^2 + z^2$.
29. $4x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 0$.
30. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{9} = 1$.
31. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - by + 9z - b = 0$, donde b es una constante.
32. Describir, utilizando coordenadas polares, las curvas de nivel de la función definida por
$$f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2), \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ y } f(0, 0) = 0.$$
33. Sea $f: \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ la función dada en coordenadas polares por $f(r, \theta) = (\cos 2\theta)/r^2$. Dibujar algunas curvas de nivel en el plano xy. Aquí, $\mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$.
34. Demostrar que en la Figura 2.1.15 la «curva» de nivel $z = 3$ tiene sólo dos puntos.

2.2. Límites y continuidad

Esta sección desarrolla los conceptos de conjunto abierto, límites y continuidad; se necesitan los conjuntos abiertos para entender los límites, y los límites se necesitan, a su vez, para entender la continuidad y la diferenciabilidad.

Como en el cálculo elemental, no es necesario asimilar completamente el concepto de límite para resolver los problemas de diferenciación. Por esta razón, el profesor puede tratar el material que sigue con grados variables de rigor. El estudiante debe consultar con el profesor la profundidad de comprensión requerida.

Conjuntos abiertos

Comenzamos definiendo qué es un disco abierto para formular el concepto de conjunto abierto. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea r un número real positivo. Se define ***disco abierto*** (o ***bola abierta***) de radio r y centro $\mathbf{x}_0$ como el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ tales que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Este conjunto se denota por $D_r(\mathbf{x}_0)$, y es el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ cuya distancia a $\mathbf{x}_0$ es menor que r. Nótese que incluimos solamente aquellos $\mathbf{x}$ para los que se verifica la desigualdad *estricta*. El disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ está ilustrado en la Figura 2.2.1 para $n = 1, 2, 3$. En el caso $n = 1$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, el disco abierto $D_r(x_0)$

es el intervalo abierto $(x_0 - r, x_0 + r)$, formado por los números $x \in \mathbb{R}$ que están *estrictamente* entre $x_0 - r$ y $x_0 + r$. En el caso $n = 2$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es el «interior» del disco de radio r centrado en $\mathbf{x}_0$. En el caso $n = 3$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es la parte «interior» de la bola de radio r centrada en $\mathbf{x}_0$.

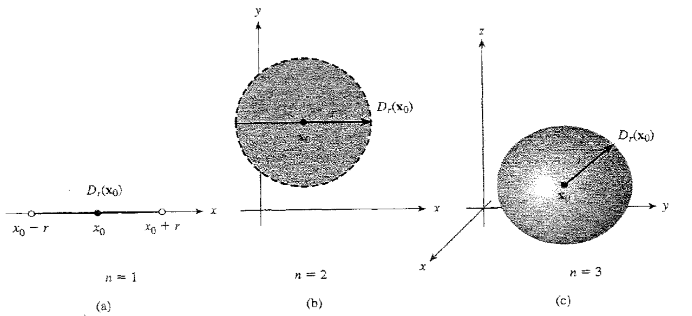


Figura 2.2.1. Cómo son los discos $D_r(\mathbf{x}_0)$ en (a) una, (b) dos, (c) tres dimensiones.

DEFINICIÓN: Conjuntos abiertos Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ (es decir, sea U un subconjunto de $\mathbb{R}^n$). Llamamos a U ***conjunto abierto*** si para todo punto $\mathbf{x}_0$ en U existe $r > 0$ tal que $D_r(\mathbf{x}_0)$ está contenido dentro de U; simbólicamente escribimos $D_r(\mathbf{x}_0) \subset U$ (*véase* la Figura 2.2.2).

El número $r > 0$ puede depender de $\mathbf{x}_0$, y por lo general r decrecerá cuando $\mathbf{x}_0$ se aproxime al «borde» de U. Intuitivamente, un conjunto U es abierto cuando los puntos de la «frontera» de U no pertenecen a U. En la Figura 2.2.2, la línea discontinua *no* está incluida en U.

Convendremos en que el conjunto vacío $\varnothing$ (el conjunto que no tiene elementos) es abierto.

Hemos definido disco abierto y conjunto abierto. Por la elección que hemos hecho de los términos parece que un disco abierto debería ser un conjunto abierto. Si se piensa un poco se ve que este hecho requiere demostración. El teorema que sigue lo prueba.

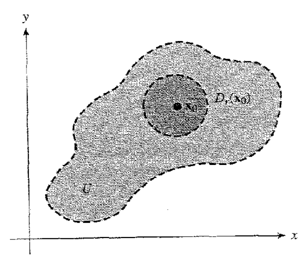


Figura 2.2.2. Un conjunto abierto U es aquel que contiene completamente algún disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ para cada uno de sus puntos $\mathbf{x}_0$.

TEOREMA 1 Para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y para todo $r > 0$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es un conjunto abierto.

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{x} \in D_r(\mathbf{x}_0)$, es decir, sea $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Según la definición de conjunto abierto, debemos hallar un $s > 0$ tal que $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$. Si miramos la Figura 2.2.3, observamos que $s = r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ es una elección razonable; nótese que $s > 0$, pero que s es tanto menor cuanto más cerca está $\mathbf{x}$ del borde de $D_r(\mathbf{x}_0)$.

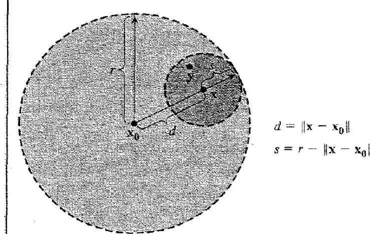


Figura 2.2.3. La geometría de la demostración de que un disco abierto es un conjunto abierto.

Para demostrar que $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$ sea $\mathbf{y} \in D_s(\mathbf{x})$; es decir, sea $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < s$. Queremos demostrar que también $\mathbf{y} \in D_r(\mathbf{x}_0)$. Demostrarlo, dada la definición de r-disco, es lo mismo que demostrar que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r$. Esto lo hacemos utilizando la desigualdad triangular para vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = \|(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leqslant \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < s + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r.$$

Así, $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r$.

El ejemplo siguiente ilustra ciertas técnicas útiles para determinar si un conjunto es abierto.

EJEMPLO 2.7 Demostrar que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ es un conjunto abierto.

Solución

El conjunto está representado en la Figura 2.2.4.

Intuitivamente, este conjunto es abierto ya que ninguno de los puntos de la «frontera», $x = 0$, está contenido en el conjunto. Un razonamiento de este tipo será, con frecuencia, suficiente cuando uno se ha acostumbrado al concepto de conjunto abierto; sin embargo, al principio deben darse más detalles. Para demostrar que A es abierto mostramos que para todo punto $(x, y) \in A$ existe $r > 0$ tal que $D_r(x, y) \subset A$. Si $(x, y) \in A$, entonces $x > 0$. Se elige $r = x$. Si $(x_1, y_1) \in D_r(x, y)$, tenemos que

$$|x_1 - x| = \sqrt{(x_1 - x)^2} \leqslant \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x,$$

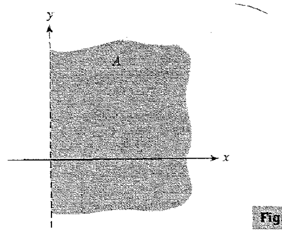


Figura 2.2.4. Demostrar que A es abierto.

y por tanto $x_1 - x < x$ y $x - x_1 < x$. La última desigualdad implica que $x_1 > 0$, es decir, $(x_1, y_1) \in A$. Por tanto $D_r(x, y) \subset A$ es abierto (*véase* la Figura 2.2.5).

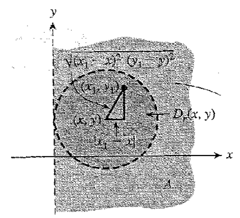


Figura 2.2.5. Construcción de un disco alrededor de un punto de A que está completamente contenido en A.

Es útil dar un nombre especial a un conjunto abierto que contiene a un punto $\mathbf{x}$, ya que esta idea aparece con frecuencia en el estudio de límites y continuidad. Así, por ***entorno*** de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se entiende un conjunto abierto U que contiene al punto $\mathbf{x}$. Por ejemplo, para todo $r > 0$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es un entorno del punto $\mathbf{x}_0$. El conjunto A del Ejemplo 2.7 es un entorno del punto $\mathbf{x}_0 = (3, -10)$.

Frontera

Introducimos ahora el concepto de punto frontera, que mencionamos en el Ejemplo 2.7.

DEFINICIÓN: Punto frontera Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se llama ***punto frontera*** de A si todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto de A y al menos un punto que no está en A.

En esta definición el mismo $\mathbf{x}$ puede estar o no estar en A; si $\mathbf{x} \in A$, entonces $\mathbf{x}$ es un punto frontera si todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto que *no* está en A (ya contiene un punto de A: el propio $\mathbf{x}$). De forma análoga, si $\mathbf{x}$ no está en A, éste es un punto frontera si todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto de A.

Nos interesarán particularmente los puntos frontera de los conjuntos abiertos. La definición de conjunto abierto implica que ningún punto de un conjunto abierto A es un punto frontera de A. Por tanto, *un punto* $\mathbf{x}$ *es punto frontera de un conjunto abierto* A *si y solamente si* $\mathbf{x}$ *no es un punto de* A *y todo entorno de* $\mathbf{x}$ *tiene intersección no vacía con* A.

Lo anterior expresa en términos precisos la idea intuitiva de que un punto frontera de A es un punto que está en el «borde» de A. En muchos ejemplos es obvio cuáles son los puntos frontera.

EJEMPLO 2.8

a) Sea $A = (a, b)$ un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces los puntos frontera de A son los puntos a y b. La Figura 2.2.6 y la definición lo muestran con claridad [se pedirá al lector que lo demuestre en el Ejercicio 20c) de esta sección].

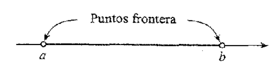


Figura 2.2.6. Los puntos frontera del intervalo (a, b).

b) Sea $A = D_r(x_0, y_0)$ un r-disco con centro (x_0, y_0) en el plano. La frontera está formada por los puntos (x, y) tales que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (Figura 2.2.7).

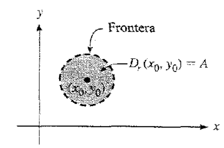


Figura 2.2.7. La frontera de A está formada por los puntos en el borde de A.

c) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Entonces la frontera de A está formada por todos los puntos del eje y (el estudiante debe hacer un esquema).

d) Sea A el disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ menos el punto $\mathbf{x}_0$ (un disco «perforado» con centro $\mathbf{x}_0$). Entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto frontera de A.

Límites

Ponemos ahora nuestra atención en el concepto de límite. *En toda la discusión siguiente el dominio de definición de la función f será un conjunto abierto A.* Nos interesa hallar el límite de f cuando $\mathbf{x} \in A$ se aproxima, bien a un punto de A, bien a un punto frontera de A.

El lector debe apreciar el hecho de que el concepto de límite es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones: nos permite estudiar derivadas, y por tanto máximos y mínimos, asíntotas, integrales impropias y otras características importantes de las funciones, y además es útil en las series infinitas y en las sucesiones. Daremos una teoría de límites de funciones de varias variables que incluye la teoría para funciones de una variable como caso particular.

En el cálculo de una variable, el estudiante ha visto la noción de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ para una función $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de un subconjunto A de los números reales en los números reales. Intuitivamente significa que cuando x se acerca más y más a x_0, los valores de $f(x)$ se acercan más y más a (el valor límite) l. Para fundamentar matemáticamente esta idea intuitiva usualmente se introduce, bien el «método de los épsilon (ε) y delta (δ)», bien el «método de los entornos». Para las funciones de varias variables se hace lo mismo. En lo que sigue desarrollamos el método de los entornos para estudiar límites. El método épsilon-delta se deja como estudio opcional al final de esta sección.

DEFINICIÓN: Límite Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde A es un conjunto abierto. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto de A o un punto frontera de A, y sea N un entorno de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Decimos que f ***finaliza en** N **cuando** $\mathbf{x}$ **tiende a*** $\mathbf{x}_0$ si existe un entorno U de $\mathbf{x}_0$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \in U$ y $\mathbf{x} \in A$ implica $f(\mathbf{x}) \in N$. (El significado geométrico de esta definición se ilustra en la Figura 2.2.8; nótese que no es necesario que el punto $\mathbf{x}_0$ pertenezca a A, de forma que $f(\mathbf{x}_0)$ no está necesariamente definido). Decimos que $f(\mathbf{x})$ ***tiende a*** $\mathbf{b}$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, o simbólicamente

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \qquad \text{o} \qquad f(\mathbf{x}) \to \mathbf{b} \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0,$$

si, dado *cualquier* entorno N de $\mathbf{b}$, f finaliza en N cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ (es decir, «$f(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}$ si $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$»). Puede ocurrir que cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, $f(\mathbf{x})$ no se aproxime a ningún número en particular. En este caso decimos que $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ ***no existe***.

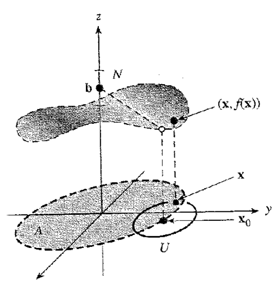


Figura 2.2.8. Límites por entornos: si $\mathbf{x}$ pertenece a U entonces $f(\mathbf{x})$ pertenecerá a N (el circulito blanco indica que el punto no está sobre la gráfica). En la figura, $f: A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \to \mathbb{R}$ (la línea discontinua no está en la gráfica de f).

Por tanto, siempre que hablemos del concepto de $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(x)$, supondremos que $\mathbf{x}_0$ bien pertenece a un conjunto abierto en el que f está definida, bien está en la frontera de este conjunto.

Una de las razones por las que insistimos en que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ en la definición de límite es la que podemos recordar del cálculo de una variable en el que queremos definir la derivada $f'(x_0)$ de una función f en el punto x_0 por medio de

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

y esta expresión no está definida para $x = x_0$.

EJEMPLO 2.9

a) Este ejemplo muestra una función para la que no existe el límite en un punto. Consideramos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

El $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe ya que existen puntos x_1 tan cerca como se quiera de 0 para los que $f(x_1) = 1$ y también puntos x_2 tan cerca como se quiera de 0 para los que $f(x_2) = -1$; es decir, no hay un único número al que f se acerque cuando x se acerca a 0 (*véase* la Figura 2.2.9). Si f se restringe al dominio (0, 1) o al dominio $(-1, 0)$, entonces el límite sí que existe. ¿Puede el lector decir por qué?

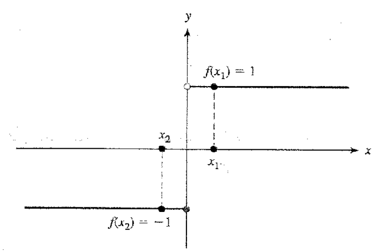


Figura 2.2.9. El límite de esta función cuando $x \to 0$ no existe.

b) Este ejemplo muestra una función cuyo límite existe pero cuyo valor límite no es igual al valor de la función en el punto en el que se toma el límite. Definimos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por medio de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ciertamente $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, ya que para todo entorno U de 0, $x \in U$ y $x \neq 0$ se tiene que $f(x) = 0$. En la Figura 2.2.10 se ve que f se acerca a 0 cuando $x \to 0$; no nos importa que f tome un valor distinto en 0.

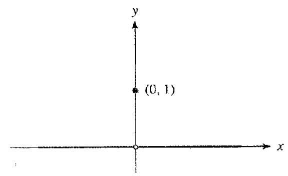


Figura 2.2.10. El límite de esta función cuando $x \to 0$ es cero.

EJEMPLO 2.10 Usar la definición para verificar el «obvio» $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Solución

Sea f la función definida por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, y sea N un entorno cualquiera de $\mathbf{x}_0$. Tenemos que demostrar que $f(\mathbf{x})$ finaliza en N cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Según la definición debemos hallar un entorno U de $\mathbf{x}_0$ con la propiedad de que si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x} \in U$, entonces $f(\mathbf{x}) \in N$. Tomamos $U = N$. Si $\mathbf{x} \in U$, entonces $x \in N$; dado que $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ se sigue que $f(\mathbf{x}) \in N$. Por tanto hemos demostrado que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. De igual forma tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0, \qquad \text{etc.}$$

En lo que sigue el estudiante puede suponer, sin demostración, la validez de los límites del cálculo de una variable. Por ejemplo, se podrá usar que $\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ y que $\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 0 = 0$.

EJEMPLO 2.11 Este ejemplo muestra otro caso en el que el límite no puede simplemente «leerse» de la función. Hallar $\lim_{x\to 1} g(x)$ donde

$$g\colon x \to \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

Solución

Esta función se representa en la Figura 2.2.11(a).

Vemos que $g(1)$ no está definido ya que la división por cero no está definida; sin embargo, si multiplicamos el numerador y el denominador de $g(x)$ por $\sqrt{x}+1$, hallamos que para todo x en el dominio de g se tiene que

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1, \qquad x \neq 1.$$

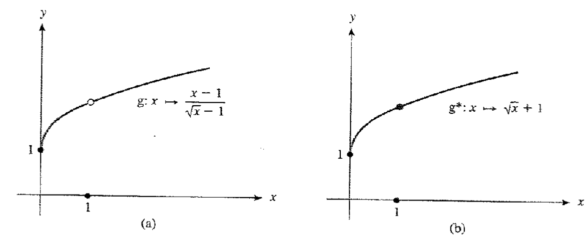


Figura 2.2.11. Estás dos gráficas son iguales excepto en que en la parte (a) g no está definida en $x = 1$, mientras que en la parte (b) g^* está definida para todo $x \geqslant 0$.

La expresión $g^*(x) = \sqrt{x}+1$ está definida y toma el valor 2 en $x = 1$; del cálculo de una variable $g^*(x) \to 2$ cuando $x \to 1$. Pero dado que $g^*(x) = g(x)$ para todo $x \geqslant 0$, $x \neq 1$, tenemos forzosamente que $g(x) \to 2$ cuando $x \to 1$.

En breve estudiaremos otros ejemplos con dos variables.

Propiedades de los límites

Para hablar con propiedad de *el* límite tendremos que demostrar que f no puede tener *más de un* límite cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Intuitivamente esta propiedad es clara y ahora la enunciamos formalmente (*véase* la demostración en el suplemento de Internet).

TEOREMA 2: Unicidad del límite

$$\text{Si} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2, \quad \text{entonces} \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2.$$

Para llevar a cabo operaciones prácticas con límites nos hacen falta algunas reglas como, por ejemplo, que el límite de una suma es igual a la suma de los límites. Estas reglas se recogen en el siguiente teorema (*véase* la demostración en el suplemento de Internet del Capítulo 2).

TEOREMA 3: Propiedades de los límites Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0$ un punto de A o de la frontera de A, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

i) Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$, donde $cf\colon A \to \mathbb{R}^m$ se define como $\mathbf{x} \mapsto c(f(\mathbf{x}))$.

ii) Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=\mathbf{b}_1$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})=\mathbf{b}_2$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f+g)(\mathbf{x})=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$, donde $(f+g)\colon A\to\mathbb{R}^m$ se define como $\mathbf{x}\to f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$.

iii) Si $m=1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=b_1$, y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})=b_2$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (fg)(\mathbf{x})=b_1b_2$, donde $(fg)\colon A\to\mathbb{R}$ se define como $\mathbf{x}\to f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$.

iv) Si $m=1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=b\neq 0$ y $f(\mathbf{x})\neq 0$ para todo $\mathbf{x}\in A$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} 1/f(\mathbf{x})=1/b$, donde $1/f\colon A\to\mathbb{R}$ se define como $\mathbf{x}\to 1/f(\mathbf{x})$.

v) Si $f(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_m(\mathbf{x}))$ donde $f_i\colon A\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,m$, son las componentes de la función f, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_m)$ si y solamente si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x})=b_i$ para cada $i=1,\ldots,m$.

Estos resultados debieran ser intuitivamente claros. Por ejemplo, la regla ii) dice que si $f(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}_1$ y $g(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}_2$ cuando $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$, entonces $f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$ cuando $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$. El ejemplo siguiente muestra cómo se usa.

EJEMPLO 2.12 Sea $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\to x^2+y^2+2$. Calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y).$$

Solución

Aquí f es la suma de las tres funciones $(x,y)\to x^2$, $(x,y)\to y^2$, y $(x,y)\to 2$. El límite de una suma es la suma de los límites y el límite de un producto es el producto de los límites (Teorema 3). Por tanto, usando el hecho de que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x=x_0$ (Ejemplo 2.10), obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2=\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x\right)=x_0^2$$

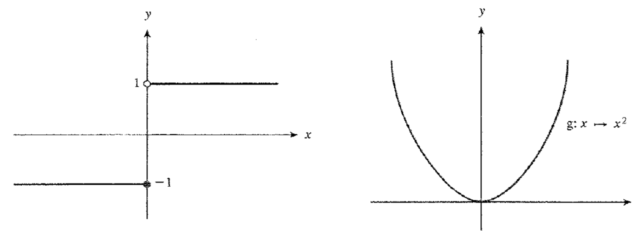
y, por el mismo razonamiento, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y^2=y_0^2$. En consecuencia

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=0^2+1^2+2=3.$$

Funciones continuas

En el cálculo de una variable aprendimos que la idea de función continua se basa en la noción intuitiva de una función cuya gráfica es una curva sin fracturas, es decir, una curva que no tiene *saltos*, o la curva que trazaría una partícula en movimiento o la punta de un lápiz deslizándose por el papel sin levantarse.

Para realizar un análisis detallado de las funciones necesitamos conceptos más precisos que la vaga noción recién enunciada. Un ejemplo puede aclarar estas ideas. Considérese la función concreta $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-1$ si $x\leqslant 0$ y $f(x)=1$ si $x>0$. La gráfica de f se muestra en la Figura 2.2.12(a). El pequeño círculo abierto denota que el punto $(0,1)$ *no* está en la gráfica de f. Claramente, la gráfica de f se rompe en $x=0$. Considérese también la función $g\colon x\to x^2$. Ésta es la función dibujada en la Figura 2.2.12(b). La gráfica de g no se rompe en ningún punto.



(a) (b)

Figura 2.2.12. La función f en la parte (a) no es continua ya que su valor salta cuando x cruza el punto 0, mientras que la función g en la parte (b) es continua.

Si se examinan ejemplos de funciones como f cuyas gráficas se rompen en algún punto x_0, y funciones como g cuyas gráficas no se rompen, se ve que la principal diferencia entre ellas es que para una función como g los valores de $g(x)$ se acercan a $g(x_0)$ cuando x se acerca más y más a x_0. La misma idea funciona para funciones de varias variables. Pero la noción de «más y más cerca» no es suficiente como definición matemática; por tanto formularemos estos conceptos en términos de límites.

Dado que la condición de $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)$ significa que $f(\mathbf{x})$ está cerca de $f(\mathbf{x}_0)$ cuando $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$, vemos que la condición de límite ciertamente coincide con el requisito de la no rotura de la gráfica de f (*véase* la Figura 2.2.13 en la que se ilustra el caso $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$). El caso de varias variables es más fácil de visualizar si tratamos con funciones de valores reales de la forma $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. En este caso podemos visualizar f dibujando su gráfica, que consiste en los puntos (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$ con $z=f(x,y)$. La continuidad de f significa, por tanto, que su gráfica no tiene «fracturas» (*véase* la Figura 2.2.14).

DEFINICIÓN: Continuidad Sea $f\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función dada con dominio A. Sea $\mathbf{x}_0\in A$. Decimos que f es ***continua*** en $\mathbf{x}_0$ si y solamente si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0).$$

Si decimos solamente que f es ***continua***, queremos decir que f es continua en cada punto $\mathbf{x}_0$ de A. Si f no es continua en $\mathbf{x}_0$, decimos que f es ***discontinua*** en $\mathbf{x}_0$. Si f es discontinua en algún punto de su dominio decimos que f es ***discontinua***.

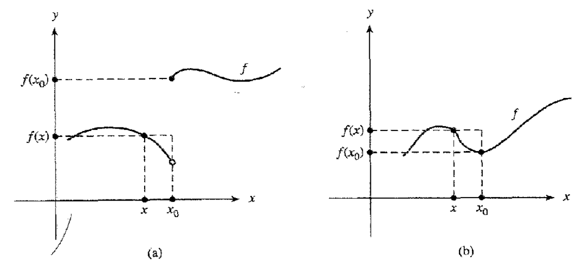


Figura 2.2.13. (a) Función discontinua en la que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no existe. (b) Función continua en la que el límite existe y es igual a $f(x_0)$.

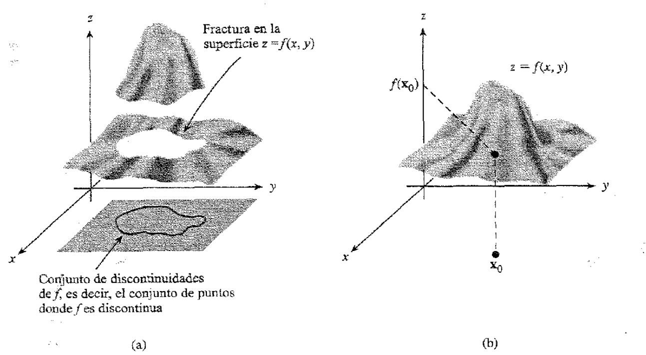


Figura 2.2.14. (a) Una función discontinua de dos variables. (b) Una función continua.

EJEMPLO 2.13 Cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ es continuo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. De hecho, por el Teorema 3 y el Ejemplo 2.10,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) &= \lim_{x \to x_0} a_0 + \lim_{x \to x_0} a_1x + \cdots + \lim_{x \to x_0} a_nx^n \\ &= a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n,\end{aligned}$$

ya que el límite de un producto es el producto de los límites, lo que da

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \left(\lim_{x \to x_0} x\right)^n = x_0^n.$$

EJEMPLO 2.14 Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Entonces f es continua ya que, por los teoremas del límite y el Ejemplo 2.10,

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} xy = \left(\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} x\right)\left(\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} y\right) = x_0y_0.$$

Se puede ver por el mismo método que cualquier polinomio $p(x, y)$ (por ejemplo, $p(x, y) = 3x^2 - 6xy^2 + y^3$) en x e y es continuo.

EJEMPLO 2.15 La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } y \leqslant 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

no es continua en $(0, 0)$ o en cualquier punto en la parte positiva del eje x o en la parte positiva del eje y. De hecho, si $(x_0, y_0) = \mathbf{u}$ es uno de estos puntos (es decir, $x_0 = 0$ e $y_0 \geqslant 0$, o $y_0 = 0$ y $x_0 \geqslant 0$) y $\delta > 0$, existen puntos $(x, y) \in D_\delta(\mathbf{u})$, un entorno de $\mathbf{u}$, con $f(x, y) = 1$ y puntos $(x, y) \in D_\delta(\mathbf{u})$ con $f(x, y) = 0$. Por tanto no es cierto que $f(x, y) \to f(x_0, y_0) = 1$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Para demostrar que una función es continua podemos utilizar los teoremas del límite (*véase* el Teorema 3 y el Ejemplo 2.13). Si transcribimos esos resultados en términos de continuidad, ello nos conducirá al siguiente teorema:

TEOREMA 4: Propiedades de las funciones continuas Supongamos que

$$f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

y sea c un número real.

i) Si f es continua en $\mathbf{x}_0$ también lo es cf, donde $(cf)(\mathbf{x}) = c[f(\mathbf{x})]$.

ii) Si f y g son continuas en $\mathbf{x}_0$ también lo es $f + g$, donde la suma de f y g se define como $(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

iii) Si f y g son continuas en $\mathbf{x}_0$ y $m = 1$ entonces la función producto fg, definida por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$, es continua en $\mathbf{x}_0$.

iv) Si $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbf{x}_0$ y no se anula en A entonces el cociente $1/f$ es continuo en $\mathbf{x}_0$, donde $(1/f)(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$.

v) Si $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$ si y solamente si cada una de las funciones con valores reales $f_1, \ldots, f_m$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

Frecuentemente se usa una variante de iv): si $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ y f es continua, entonces $f(\mathbf{x}) \neq 0$ en un entorno de $\mathbf{x}_0$ y, por tanto, $1/f$ está definida en ese entorno y $1/f$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

EJEMPLO 2.16 Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x^2y, (y + x^3)/(1 + x^2))$. Demostrar que f es continua.

Solución

Para verlo, por la propiedad v) del Teorema 4 es suficiente mostrar que cada componente es continua. Como hemos mencionado, cualquier polinomio de dos variables es continuo; por tanto, la aplicación $(x, y) \to x^2y$ es continua. Dado que $1 + x^2$ es continua y distinta de cero sabemos, por la propiedad iv), que $1/(1 + x^2)$ es continua; así que $(y + x^3)/(1 + x^2)$ es el producto de dos funciones continuas y, por iii), continuo.

Razonamientos similares se aplican a ejemplos como la función $\mathbf{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{c}(t) = (t^2, 1, t^3/(1 + t^2))$ para mostrar que también son funciones continuas.

Composición

A continuación estudiemos la *composición*, otra operación básica que se puede realizar con funciones. Si g aplica A en B y f aplica B en C, la ***composición de*** g ***con*** f, o de f sobre g, que se denota por $f \circ g$, aplica A en C y lleva $\mathbf{x} \to f(g(\mathbf{x}))$ (*véase* la Figura 2.2.15). Por ejemplo, $\operatorname{sen}(x^2)$ es la composición de $x \to x^2$ con $y \to \operatorname{sen} y$.

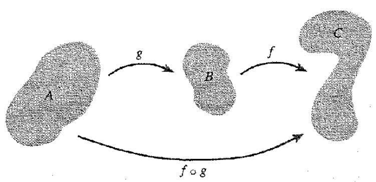


Figura 2.2.15. La composición de f sobre g.

TEOREMA 5: Continuidad de la composición Sea $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $f\colon B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Supongamos que $g(A) \subset B$, de forma que $f \circ g$ está definida en A. Si g es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ y f es continua en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

La intuición que hay tras esto es fácil; la demostración formal en el suplemento de Internet sigue un esquema similar. Intuitivamente, debemos demostrar que al acercarse $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}_0$, $f(g(x))$ se aproxima a $f(g(x_0))$. Pero cuando x se acerca a x_0, $g(\mathbf{x})$ se aproxima a $g(\mathbf{x}_0)$ (por la continuidad de g en $\mathbf{x}_0$); y al acercarse $g(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x}_0)$, $f(g(\mathbf{x}))$ se acerca a $f(g(\mathbf{x}_0))$ (por la continuidad de f en $g(\mathbf{x}_0)$).

EJEMPLO 2.17 Sea $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{30} + \operatorname{sen} z^3$. Probar que f es continua.

Solución

Podemos escribir f como suma de dos funciones $(x^2 + y^2 + z^2)^{30}$ y $\operatorname{sen} z^3$, por tanto es suficiente demostrar que cada una de ellas es continua. La primera es la composición de $(x, y, z) \to (x^2 + y^2 + z^2)$ con $u \to u^{30}$ y la segunda, la composición de $(x, y, z) \to z^3$ con $u \to \operatorname{sen} u$, y por tanto obtenemos la continuidad por el Teorema 5.

Límites en términos de ϵ y δ

Enunciamos ahora un teorema (demostrado en el suplemento de Internet del Capítulo 2) que da una formulación útil de la noción de límite en términos de épsilons y deltas, y que a menudo se toma como *definición* de límite. De hecho, ésta es otra forma de hacer precisa la formulación intuitiva «$f(\mathbf{x})$ se acerca a $\mathbf{b}$ cuando $\mathbf{x}$ se acerca a $\mathbf{x}_0$». Como ayuda para entender esta formulación el lector debe estudiarla en cada uno de los ejemplos ya presentados.

TEOREMA 6 Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto de A o un punto frontera de A. Entonces $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ si y solamente si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x} \in A$ que satisface $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ se tiene que $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$ (*véase* la Figura 2.2.16).

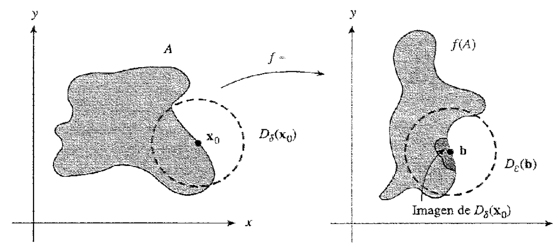


Figura 2.2.16. La geometría de la definición ε-δ del límite.

A fin de ilustrar la metodología de la técnica épsilon-delta del Teorema 6, estudiamos los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 2.18 Demostrar que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} x = 0$ usando el método ε-δ.

Solución

Nótese que si $\delta > 0$, $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ implica

$$|x - 0| = |x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

Por tanto, si $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$, entonces $|x - 0|$ también es menor que δ. Dado $\varepsilon > 0$ debemos hallar $\delta > 0$ (que, por lo general, dependerá de ε) con la propiedad de que $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ implique $|x - 0| < \varepsilon$. ¿Cómo elegiremos nuestro δ? Del cálculo que precede vemos que si elegimos $\delta = \varepsilon$, entonces $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ implica que $|x - 0| < \varepsilon$, lo que demuestra que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} x = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ también podríamos haber tomado $\delta = \varepsilon/2$ o $\varepsilon/3$, pero es suficiente con hallar un solo δ que satisfaga los requisitos de la definición de límite.

EJEMPLO 2.19 Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Aun cuando f no está definida en (0, 0), determinar si $f(x, y)$ se aproxima a algún número cuando (x, y) se aproxima a (0, 0).

Solución

Del cálculo de una variable o por la regla de l'Hôpital sabemos que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1.$$

Por tanto, es razonable conjeturar que

$$\lim_{\mathbf{v} \to (0,0)} f(\mathbf{v}) = \lim_{\mathbf{v} \to (0,0)} \frac{\operatorname{sen} \|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} = 1.$$

De hecho, dado que $\lim_{\alpha \to 0} (\operatorname{sen} \alpha)/\alpha = 1$, para $\varepsilon > 0$ podemos hallar $\delta > 0$, $0 < \delta < 1$, tal que $0 < |\alpha| < \delta$ implica que $|(\operatorname{sen} \alpha)/\alpha - 1| < \varepsilon$. Si $0 < \|\mathbf{v}\| < \delta$, entonces $0 < \|\mathbf{v}\|^2 < \delta^2 < \delta$, y por tanto

$$|f(\mathbf{v}) - 1| = \left| \frac{\operatorname{sen} \|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Así, $\lim_{\mathbf{v} \to (0,0)} f(\mathbf{v}) = 1$. Si representamos gráficamente $[\operatorname{sen}(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$ en el computador obtenemos una gráfica que de hecho se comporta bien cerca de (0, 0) (Figura 2.2.17).

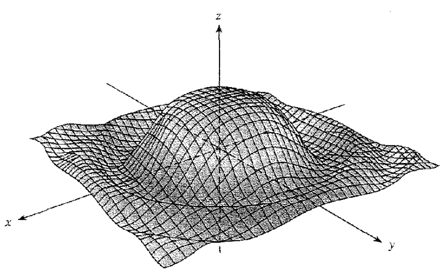


Figura 2.2.17. Gráfica de la función $f(x, y) = [\operatorname{sen}(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$.

EJEMPLO 2.20 Demostrar que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Solución

Tenemos que demostrar que $x^2/\sqrt{x^2 + y^2}$ es pequeño cuando (x, y) está cerca del origen. Para hacerlo utilizamos la desigualdad siguiente:

$$0 \leqslant \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leqslant \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (\text{ya que } y^2 \geqslant 0)$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta = \varepsilon$. Entonces $\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, y por tanto $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ implica que

$$\left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta = \varepsilon.$$

Por tanto se cumplen las condiciones del Teorema 6 y se comprueba el valor del límite.

EJEMPLO 2.21

a) ¿Existe $\lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2/(x^2 + y^2)$?

[*Véase* la Figura 2.2.18(a).]

b) Demostrar que [*véase* la Figura 2.2.18(b)]

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

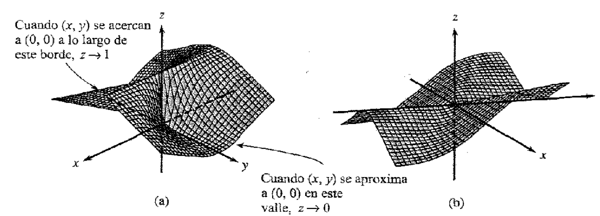


Figura 2.2.18. (a) La función $z = x^2/(x^2 + y^2)$ no tiene límite en (0, 0). (b) La función $z = (2x^2y)/(x^2 + y^2)$ tiene límite 0 en (0, 0).

Solución

a) Si el límite existe, $x^2/(x^2+y^2)$ debe aproximarse a un valor determinado, llamémoslo a, cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$. En particular, si (x, y) se aproxima al origen a lo largo de un trayectoria dada, entonces $x^2/(x^2+y^2)$ debe aproximarse al valor límite a. Si (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = 0$, el valor límite es, claramente, 1 (póngase $y = 0$ en ~~la expresión~~ precedente y se obtendrá $x^2/x^2 = 1$). Si (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $x = 0$, el valor límite es

$$\lim_{y\to 0} \frac{0^2}{0^2+y^2} = 0 \neq 1.$$

Por tanto, no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2/(x^2+y^2)$.

b) Nótese que

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{2x^2y}{x^2}\right| = 2|y|.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, elíjase $\delta = \varepsilon/2$; entonces $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ implica que $|y| < \delta$ y por tanto

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < 2\delta = \varepsilon.$$

Utilizar la notación ε-δ nos lleva a la siguiente reformulación de la definición de continuidad.

TEOREMA 7 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada. Entonces f es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ si y solamente si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \text{implica} \quad \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

La demostración es casi inmediata. Nótese que en el Teorema 6 insistimos en que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$, es decir, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Esta condición *no* se impone aquí; de hecho la conclusión del Teorema 7 es ciertamente válida cuando $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, y por tanto no hay necesidad de excluir este caso. Aquí nos importa el valor de f en $\mathbf{x}_0$; queremos que, en los puntos próximos, f sea cercana a *este* valor.

EJERCICIOS

En los ejercicios siguientes el lector puede suponer que las funciones exponencial, seno y coseno son continuas y puede utilizar con libertad técnicas del cálculo de una variable, como la regla de l'Hôpital. Demostrar que los subconjuntos del plano de los ejercicios 1 a 4 son abiertos:

1. $A = \{(x, y) \mid -1 < x < 1,\ -1 < y < 1\}$.

2. $B = \{(x, y) \mid y > 0\}$.

3. $C = \{(x, y) \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}$.

4. $D = \{(x, y) \mid x \neq 0 \text{ y } y \neq 0\}$.

5. Calcular los límites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^3 y$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$.

6. Calcular los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^x y$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$.

7. Calcular los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} (x^2 - 3x + 5)$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x$.

c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$.

8. Calcular, si existen, los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{y}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$.

9. Calcular, si existen, los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{y}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2}$.

10. Calcular, si existen, los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x - 1 - (x^2/2)}{x^4 + y^4}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}$.

11. Calcular, si existen, los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{xy}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xyz)}{xyz}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$, donde $f(x, y, z) = (x^2 + 3y^2)/(x + 1)$.

12. Calcular, si existen, los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x - 2x}{x^3}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x^2 y \cos z}{x^2 + y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} 2x - 2x + y}{x^3 + y}$.

13. Calcular, si existe, $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, en los casos siguientes:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to |x|$, $x_0 = 1$.

b) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|$, con $\mathbf{x}_0$ arbitrario.

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \to (x^2, e^x)$, $x_0 = 1$.

d) $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (\operatorname{sen}(x - y), e^{x(y+1)} - x - 1)/\|(x, y)\|$, $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

14. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el disco unidad abierto $D_1(0, 0)$ con el punto $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ añadido, y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \to f(\mathbf{x})$ la función constante $f(\mathbf{x}) = 1$. Demostrar que $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 1$.

15. Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas, demostrar que las funciones

$$f^2 g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \to [f(\mathbf{x})]^2 g(\mathbf{x})$$

y,

$$f^2 + g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \to [f(\mathbf{x})]^2 + g(\mathbf{x})$$

son continuas.

16. a) Demostrar que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to (1 - x)^8 + \cos(1 + x^3)$ es continua.

b) Demostrar que la aplicación $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2 e^x/(2 - \operatorname{sen} x)$ es continua.

17. a) ¿Puede hacerse $[\operatorname{sen}(x + y)]/(x + y)$ continua definiéndola adecuadamente en $(0, 0)$?

b) ¿Puede hacerse $xy/(x + y)$ continua definiéndola adecuadamente en $(0, 0)$?

c) Demostrar que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to ye^x + \operatorname{sen} x + (xy)^4$ es continua.

18. Utilizando bien ε y δ, bien coordenadas esféricas, demostrar que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

19. Utilizar la formulación ε-δ del los límites para demostrar que $x^2 \to 4$ cuando $x \to 2$. Dar otra demostración utilizando el Teorema 3.

20. a) Demostrar que para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $s < t$, $D_s(\mathbf{x}) \subset D_t(\mathbf{x})$.

b) Demostrar que si U y V son entornos de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ entonces también lo son $U \cap V$ y $U \cup V$.

c) Demostrar que los puntos frontera de un intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ son los puntos a y b.

21. Supóngase que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en $\mathbb{R}^n$ y que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Demostrar que existe una función continua $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f(\mathbf{x}) = 1$, $f(\mathbf{y}) = 0$ y, para todo $\mathbf{z}$ en $\mathbb{R}^n$, $0 \leqslant f(\mathbf{z}) \leqslant 1$.

22. Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto frontera de A. Decimos que $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty$ si para todo $N > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ y $\mathbf{x} \in A$ implican que $f(\mathbf{x}) > N$.

a) Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 1} (x - 1)^{-2} = \infty$.

b) Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} 1/|x| = \infty$. ¿Es cierto que $\displaystyle\lim_{x\to 0} 1/x = \infty$?

c) Demostrar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1/(x^2 + y^2) = \infty$.

23. Sea $b \in \mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R}\backslash[b] \to \mathbb{R}$ una función. Escribimos $\displaystyle\lim_{x\to b-} f(x) = L$ y decimos que L es el ***límite por la izquierda*** de f en b si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $x < b$ y $0 < |x - b| < \delta$ implican que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

a) Formular una definición de ***límite por la derecha***, o $\displaystyle\lim_{x\to b+} f(x)$.

b) Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 0-} 1/(1 + e^{1/x})$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0+} 1/(1 + e^{1/x})$.

c) Dibujar la gráfica de $1/(1 + e^{1/x})$.

24. Probar que f es continua en $\mathbf{x}_0$ si y solamente si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| = 0.$$

25. Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que, para constantes K y α positivas, satisface $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leqslant K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ para todos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en A. Demostrar que f es continua (las funciones que verifican la propiedad anterior se llaman ***continuas Hölder*** o, si $\alpha = 1$, ***continuas Lipschitz***).

26. Demostrar que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en todos los puntos si y solamente si la imagen inversa de todo conjunto abierto es abierta.

27. a) Hallar un número concreto $\delta > 0$ tal que si $|a| < \delta$ entonces $|a^3 + 3a^2 + a| < 1/100$.

b) Hallar un número concreto $\delta > 0$ tal que si $x^2 + y^2 < \delta^2$ entonces

$$|x^2 + y^2 + 3xy + 180xy^5| < 1/10.000.$$

2.3. Diferenciación

En la Sección 2.1 estudiamos algunos métodos para dibujar la gráfica de una función. Utilizando solamente estos métodos puede resultar imposible obtener suficiente información para captar incluso las características generales de una función complicada. Sabemos del cálculo elemental que la idea de derivada nos puede ayudar mucho en esta tarea; por ejemplo, nos permite localizar máximos y mínimos, y cuantificar el cambio. La derivada tiene también muchas otras aplicaciones, como el estudiante habrá descubierto en cálculo elemental.

Intuitivamente sabemos, a partir del trabajo realizado en la Sección 2.2, que función continua es aquella que no tiene «fracturas» en su gráfica. Una función diferenciable de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$

debería ser tal que no solamente no tuviera fracturas en su gráfica sino que también tuviera un plano tangente bien definido en cada punto. Por tanto tendrá que carecer de bruscos dobleces, esquinas o picos en su gráfica (*véase* la Figura 2.3.1). En otras palabras, la gráfica tendrá que ser *suave*.

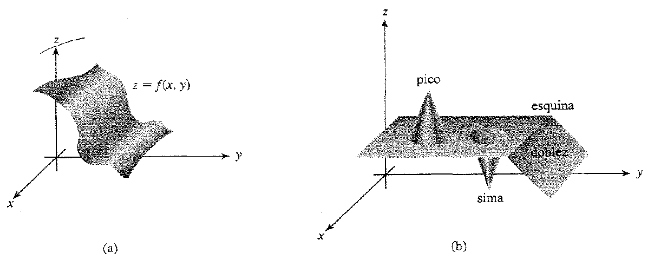


Figura 2.3.1. (a) Una gráfica suave y (b) una no suave.

Derivadas parciales

Para hacer precisas estas ideas necesitamos una definición de lo que queremos decir con la frase «$f(x_1, ..., x_n)$ es diferenciable en $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$»; de hecho, esta definición no es tan simple como pudiera pensarse. Para ese fin comenzamos con la noción de *derivada parcial*. Esta noción descansa únicamente en nuestro conocimiento del cálculo de una variable (un repaso rápido de la definición de derivada en algún libro de cálculo de una variable es aconsejable en este punto).

DEFINICIÓN: Derivadas parciales Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y supóngase que $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función con valores reales. Entonces $\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n$, las ***derivadas parciales*** de f respecto de la primera, segunda, ..., n-ésima variable, son las funciones con valores reales de n variables que, en el punto $(x_1, ..., x_n) = \mathbf{x}$, se definen como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_j + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

si los límites existen, donde $1 \leqslant j \leqslant n$ y $\mathbf{e}_j$ es el vector j-ésimo de la base canónica definido por $\mathbf{e}_j = (0, ..., 1, ..., 0)$, con el 1 en la posición j-ésima (*véase* la Sección 1.5). El dominio de la función $\partial f/\partial x_j$ es el conjunto de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ para los que el límite existe.

En otra palabras, $\partial f/\partial x_j$ es la derivada de f respecto de la variable x_j, con las otras variables fijas. Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, a menudo utilizaremos la notación $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ en vez de $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2$, $\partial f/\partial x_3$. Si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces podemos escribir

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)),$$

de forma que podemos hablar de las derivadas parciales de cada componente; por ejemplo, $\partial f_m/\partial x_n$ es la derivada parcial de la componente m-ésima respecto de x_n, la variable n-ésima.

EJEMPLO 2.22 Si $f(x, y) = x^2y + y^3$, hallar $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

Solución

Para hallar $\partial f/\partial x$ fijamos y (piénsese que es un número, digamos 1) y diferenciamos solamente respecto de x; esto da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d(x^2y + y^3)}{dx} = 2xy.$$

De forma análoga, para hallar $\partial f/\partial y$ fijamos x y diferenciamos solamente respecto de y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d(x^2y + y^3)}{dy} = x^2 + 3y^2.$$

Para indicar que una derivada parcial debe evaluarse en un punto particular, por ejemplo en (x_0, y_0), escribimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0, y=y_0} \quad \text{o} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}.$$

Cuando escribamos la variable dependiente como $z = f(x, y)$, escribiremos a veces $\partial z/\partial x$ en vez de $\partial f/\partial x$. Estrictamente, esto es un abuso de notación, pero es práctica común el utilizar estas dos notaciones de forma indistinta.

EJEMPLO 2.23 Si $z = \cos xy + x \cos y = f(x, y)$, hallar las dos derivadas parciales $(\partial z/\partial x)(x_0, y_0)$ y $(\partial z/\partial y)(x_0, y_0)$.

Solución

Fijamos primero y_0 y diferenciamos respecto de x, para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\frac{d(\cos xy_0 + x\cos y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

$$= (-y_0 \operatorname{sen} xy_0 + \cos y_0)|_{x=x_0}$$

$$= -y_0 \operatorname{sen} x_0y_0 + \cos y_0.$$

De forma análoga, si fijamos x_0 y diferenciamos respecto de y, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) &= \left.\frac{d(\cos x_0 y + x_0 \cos y)}{dy}\right|_{y=y_0} \\ &= (-x_0 \operatorname{sen} x_0 y - x_0 \operatorname{sen} y)|_{y=y_0} \\ &= -x_0 \operatorname{sen} x_0 y_0 - x_0 \operatorname{sen} y_0.\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.24 Hallar $\partial f/\partial x$ si $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución

Por la regla del cociente,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy(x/\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} = \frac{y(x^2+y^2) - x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Una definición de diferenciabilidad que requiera únicamente la existencia de derivadas parciales resulta ser insuficiente; muchos resultados típicos, como la regla de la cadena para funciones de varias variables, no se verificarían, como muestra el Ejemplo 2.25. Más adelante veremos cómo arreglar esta situación.

EJEMPLO 2.25 Sea $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$. Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$

y, de forma análoga, $(\partial f/\partial y)(0, 0) = 0$ (¡no hay indeterminaciones!). Es necesario utilizar la definición original de derivada parcial ya que las funciones $x^{1/3}$ y $y^{1/3}$ no son diferenciables en el origen. Supóngase que restringimos f a la recta $y = x$ y obtenemos $f(x, x) = x^{2/3}$ (*véase* la Figura 2.3.2). Podemos considerar la sustitución $y = x$ como la composición $f \circ g$ de la función g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $g(x) = (x, x)$, y f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

Por tanto, la composición $f \circ g$ viene dada por $(f \circ g)(x) = x^{2/3}$. Cada componente de g es diferenciable en x, y f tiene derivadas parciales en (0, 0), pero $f \circ g$ *no es diferenciable* en $x = 0$ en el sentido del cálculo de una variable. En otras palabras, *la composición de f con g no es diferenciable* en contraste con el cálculo de una variable, donde la composición de funciones diferenciables *es* diferenciable. Más adelante daremos una definición de diferenciabilidad que tiene la agradable consecuencia de que la composición de funciones diferenciables *es* diferenciable.

Hay otra razón para no estar contentos con la mera existencia de derivadas parciales de $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$: no existe plano tangente a la gráfica, de forma razonable alguna, en (0, 0). El plano xy es tangente a la gráfica a lo largo de los ejes x e y, ya que f tiene pendiente cero en (0, 0) a lo largo de estos ejes; es decir, $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$ en (0, 0). Por tanto, si hay plano tangente éste debe ser el plano xy. Sin embargo, como es evidente en la Figura 2.3.2, el plano xy no es tangente a la gráfica en otras direcciones, ya que la gráfica tiene una arruga muy acusada y por tanto el plano xy no puede decirse que sea tangente a la gráfica de f.

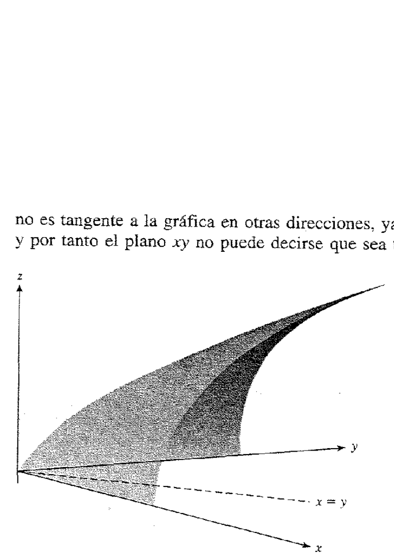


Figura 2.3.2. La parte de la gráfica de $x^{1/3}y^{1/3}$ en el primer cuadrante.

La aproximación lineal

A fin de «motivar» nuestra definición de diferenciabilidad calculemos cuál tendría que ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to f(x, y)$ en (x_0, y_0) si f fuera suficientemente suave. En $\mathbb{R}^3$ un plano no vertical tiene ecuación de la forma

$$z = ax + by + c.$$

Si éste fuera el plano tangente a la gráfica de f, las pendientes a lo largo de los ejes x e y tendrían que ser iguales a $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$, las variaciones de f respecto de x e y; por tanto, $a = \partial f/\partial x$, $b = \partial f/\partial y$ (evaluadas en (x_0, y_0)). Finalmente, podemos determinar la constante c utilizando que $z = f(x_0, y_0)$ cuando $x = x_0$, $y = y_0$. Así, se obtiene la ***aproximación lineal***:

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0), \tag{1}$$

que debe ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en (x_0, y_0), si f es «suficientemente suave» (*véase* la Figura 2.3.3).

Nuestra definición de diferenciabilidad significará que, en efecto, el plano definido por la aproximación lineal (1) es una «buena» aproximación de f cerca de (x_0, y_0). Para hacerse una idea de lo que se debe entender por una buena aproximación volvamos por un momento al cálculo de una variable. Si f es diferenciable en el punto x_0, entonces sabemos que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Si $x = x_0 + \Delta x$, reescribamos lo anterior como

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

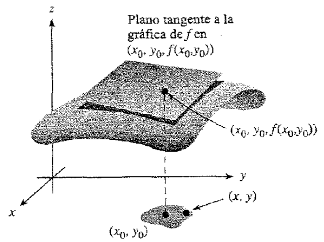


Figura 2.3.3. Para los puntos (x, y) que están cerca de (x_0, y_0), la gráfica del plano tangente está cerca de la gráfica de f.

Utilizando el límite trivial $\lim_{x\to x_0} f'(x_0) = f'(x_0)$ podemos reescribir la ecuación precedente como

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f'(x_0);$$

es decir,

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right] = 0;$$

es decir,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Por tanto, la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ con pendiente $f'(x_0)$ está cerca de f en el sentido de que la diferencia entre $f(x)$ y $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, la ecuación de la recta tangente, tiende a cero cuando x tiende a x_0, incluso dividida por $x - x_0$. Ésta es la noción de «buena aproximación» que vamos a adaptar para las funciones de varias variables, con la recta tangente reemplazada por el plano tangente (*véase* la Ecuación (1), dada anteriormente).

Diferenciabilidad de funciones de dos variables

Con la ayuda de la aproximación lineal estamos listos para definir la noción de deferenciabilidad.

DEFINICIÓN: Diferenciabilidad, dos variables Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que f es ***diferenciable*** en (x_0, y_0) si $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en (x_0, y_0), y, además,

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) - \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} \to 0 \qquad (2)$$

cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Esta ecuación expresa lo que queremos decir cuando decimos que

$$f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

es una ***buena aproximación*** de la función f.

No siempre es fácil utilizar esta definición para ver si f es diferenciable, pero será fácil de usar otro criterio que daremos en breve en el Teorema 9.

El plano tangente

Hemos usado la noción informal de plano tangente a la gráfica de una función para motivar nuestra definición de diferenciabilidad. Ahora estamos preparados para adoptar una definición formal de plano tangente.

DEFINICIÓN: Plano tangente Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. El plano de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0),$$

se llama ***plano tangente*** de la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).

EJEMPLO 2.26 Calcular el plano tangente a la gráfica de $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punto $(1, 0, 2)$.

Solución

Utilícese la Fórmula (1) con $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, y $z_0 = f(x_0, y_0) = 2$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy}.$$

En $(1, 0, 2)$ estas derivadas parciales son 2 y 1 respectivamente, por tanto, por la Fórmula (1), el plano tangente es

$$z = 2(x - 1) + 1(y - 0) + 2, \qquad \text{es decir,} \qquad z = 2x + y.$$

Escribamos como $\mathbf{D}f(x_0, y_0)$ la matriz fila

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right],$$

de forma que la definición de diferenciabilidad afirma que

$$f(x_0, y_0) + \mathbf{D}f(x_0, y_0)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

$$= f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0) \qquad (3)$$

es nuestra buena aproximación de f cerca del punto (x_0, y_0). Como anteriormente, «buena» se toma en el sentido de que la Expresión (3) difiere de $f(x, y)$ en algo pequeño multiplicado por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Decimos que la Expresión (3) es la ***mejor aproximación lineal*** de f cerca de (x_0, y_0).

Diferenciabilidad: El caso general

Ahora estamos preparados para dar una definición de diferenciabilidad de funciones f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ utilizando la discusión precedente como motivación. La derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ de $f = (f_1, \ldots, f_m)$ en un punto $\mathbf{x}_0$ es una matriz $\mathbf{T}$ cuyos elementos son $t_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ evaluadas en $\mathbf{x}_0$[2].

DEFINICIÓN: Diferenciable, *n* variables, *m* funciones Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada. Decimos que f es ***diferenciable*** en $\mathbf{x}_0 \in U$ si las derivadas parciales de f existen en $\mathbf{x}_0$ y, además,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0, \qquad (4)$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz $m \times n$ con elementos $\partial f_i / \partial x_j$ evaluadas en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ por $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ (visto como matriz columna). Llamamos a $\mathbf{T}$ la ***derivada*** de f en $\mathbf{x}_0$.

Aquí siempre denotaremos la derivada $\mathbf{T}$ de f en $\mathbf{x}_0$ por $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, aunque en algunos libros se denota por $df(\mathbf{x}_0)$ y se refieren a ella como la ***diferencial*** de f. En el caso en el que $m = 1$ la matriz $\mathbf{T}$ es simplemente el vector fila

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right]$$

(algunas veces, cuando haya posibilidad de confusión, separaremos los elementos por comas). Además, si $n = 2$ y se pone esta expresión en la Ecuación (4), resulta que las condiciones (2)

[2] Resulta que solamente es necesario postular la existencia de una matriz que dé la mejor aproximación lineal cerca de $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ya que, de hecho, esta matriz es necesariamente la matriz cuyo ij-ésimo elemento es $\partial f_i / \partial x_j$ (véase el Capítulo 2 del suplemento de Internet).

y (4) coinciden; por tanto, si ponemos $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, una función con valores reales f de n variables es diferenciable en un punto $\mathbf{x}_0$ si

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|}\left|f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j\right| = 0,$$

ya que

$$\mathbf{Th} = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

En el caso general en el que f está definida sobre un conjunto de $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^m$, la derivada es la matriz $m \times n$ dada por

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

donde las $\partial f_i / \partial x_j$ se evalúan en $\mathbf{x}_0$. La matriz $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ se llama, con propiedad, ***matriz de las derivadas parciales de f en $\mathbf{x}_0$***.

EJEMPLO 2.27 Calcular las matrices de derivadas parciales para las funciones:

a) $f(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2 x)$.

b) $f(x, y) = (x^2 + \cos y, ye^x)$.

c) $f(x, y, z) = (ze^x, -ye^z)$.

Solución

a) Aquí $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define por medio de $f_1(x, y) = e^{x+y} + y$, y de $f_2(x, y) = y^2 x$; por tanto, $\mathbf{D}f(x, y)$ es la matriz 2×2

$$\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}.$$

b) Tenemos que

$$\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -\operatorname{sen} y \\ ye^x & e^x \end{bmatrix}.$$

c) En este caso

$$\mathbf{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ 0 & -e^z & -ye^z \end{bmatrix}.$$

Gradientes

Para funciones con valores reales utilizamos una terminología especial para la derivada.

DEFINICIÓN: Gradiente Considérese el caso especial $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En este caso $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ es una matriz $1 \times n$:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right].$$

Podemos formar el vector correspondiente $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, llamado ***gradiente*** de f y denotado por ∇f o grad f.

A partir de la definición vemos que, para $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

mientras que para $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

El significado geométrico del gradiente se discutirá en la Sección 2.6. En términos del producto escalar podemos escribir la derivada de f como

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}.$$

EJEMPLO 2.28 Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^y$. Entonces

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (e^y, xe^y, 0).$$

EJEMPLO 2.29 Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $(x, y) \to e^{xy} + \operatorname{sen} xy$, entonces

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= (ye^{xy} + y\cos xy)\mathbf{i} + (xe^{xy} + x\cos xy)\mathbf{j}\\ &= (e^{xy} + \cos xy)(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).\end{aligned}$$

En el cálculo de una variable se demuestra que si f es diferenciable entonces f es continua. El Teorema 8 establece que este resultado es también cierto para funciones diferenciables de varias variables. Como sabemos, hay muchas funciones de una variable que son continuas pero no diferenciables, como $f(x) = |x|$. Antes de enunciar el resultado vamos a dar un ejemplo de una función de dos variables cuyas *derivadas parciales existen en un punto pero no es continua en ese punto.*

EJEMPLO 2.30 Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o si } y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado que f es constante en los ejes x e y, sobre los que es igual a 1,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Pero f no es continua en $(0, 0)$, ya que no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Algunos teoremas básicos

El primero de estos teoremas básicos relaciona la diferenciabilidad y la continuidad.

TEOREMA 8 Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$.

Este resultado es muy razonable, ya que «diferenciabilidad» significa que hay suficiente suavidad como para tener plano tangente, que es más fuerte que ser simplemente continua. Consúltese el Capítulo 2 del suplemento de Internet para ver una demostración formal.

Como hemos visto, usualmente es fácil decidir cuándo las derivadas parciales de una función existen utilizando lo que sabemos del cálculo de una variable. Sin embargo, la definición de diferenciabilidad parece más bien complicada y la condición de aproximación requerida en la Ecuación (4) puede parecer, y a veces lo es, difícil de verificar. Afortunadamente existe un criterio sencillo, que se da en el teorema siguiente, que nos dice cuándo una función es diferenciable.

TEOREMA 9 Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que todas las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ de f existen y son continuas en un entorno de un punto $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}$.

Damos la demostración en el Capítulo 2 del suplemento de Internet. Obsérvese la siguiente jerarquía:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Teorema 9} & & \text{Definición de derivada} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Parciales continuas} & \Rightarrow & \text{Diferenciable} & \Rightarrow & \text{Parciales existen} \end{array}$$

Cada uno de los enunciados recíprocos, obtenidos invirtiendo una implicación cualquiera, es falso (como contraejemplo al recíproco de la primera implicación utilícese $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, $f(0) = 0$; para la segunda, *véase* el Ejemplo 1 en el Capítulo 2 del suplemento de Internet o utilícese el Ejemplo 2.25 de esta sección).

Se dice que una función es de ***clase*** C^1 si sus derivadas parciales existen y son continuas; por tanto, el Teorema 9 dice que *toda función* C^1 *es diferenciable*.

EJEMPLO 2.31 Sea

$$f(x, y) = \frac{\cos x + e^{xy}}{x^2 + y^2}.$$

Demostrar que f es diferenciable en todos los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$.

Solución

Obsérvese que las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(ye^{xy} - \operatorname{sen} x) - 2x(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)xe^{xy} - 2y(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$$

son continuas excepto cuando $x = 0$ e $y = 0$ (por los resultados de la Sección 2.2). Por tanto, f es diferenciable por el Teorema 9.

En el suplemento de Internet demostramos que $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ (con $f(0, 0) = 0$) es continua, tiene derivadas parciales en $(0, 0)$ y aun así *no* es diferenciable en ese punto (*véase* la Figura 2.3.4). Por el Teorema 9, sus derivadas parciales no pueden ser continuas en $(0, 0)$.

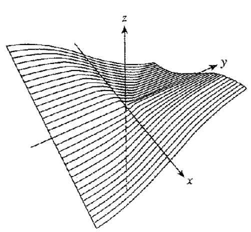


Figura 2.3.4. Esta función no es diferenciable en (0, 0) ya que está «arrugada».

EJERCICIOS

1. Hallar $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ si

   a) $f(x, y) = xy$.

   b) $f(x, y) = e^{xy}$.

   c) $f(x, y) = x \cos x \cos y$.

   d) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \log (x^2 + y^2)$.

2. Evaluar las derivadas parciales $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ de las funciones dadas en los puntos indicados.

   a) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; $(0, 0)$, $(a/2, a/2)$.

   b) $z = \log \sqrt{1 + xy}$; $(1, 2)$, $(0, 0)$.

   c) $z = e^{ax} \cos (bx + y)$; $(2\pi/b, 0)$.

3. En cada uno de los casos que siguen hallar las derivadas parciales $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$.

   a) $w = xe^{x^2+y^2}$.

   b) $w = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

   c) $w = e^{xy} \log (x^2 + y^2)$.

   d) $w = x/y$.

   e) $w = \cos (ye^{xy}) \operatorname{sen} x$.

4. Demostrar que cada una de las funciones siguientes es diferenciable en cada punto de su dominio de definición. Decidir cuáles de ellas son C^1.

   a) $f(x, y) = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

   b) $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

   c) $f(r, \theta) = \frac{1}{2} r \operatorname{sen} 2\theta$, $r > 0$.

   d) $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

   e) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

5. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^3$ en $(3, 1, 10)$.

6. Para cada una de las funciones del Ejercicio 1 calcular respectivamente el plano tangente a su gráfica en el punto indicado.

   a) $(0, 0)$. **b)** $(0, 1)$. **c)** $(0, \pi)$. **d)** $(0, 1)$.

7. Calcular la matriz de derivadas parciales de las funciones siguientes:

   a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, y)$.

   b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$.

   c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$.

   d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xye^{xy}, x \operatorname{sen} y, 5xy^2)$.

8. Hallar la matriz de derivadas parciales de

a) $f(x, y) = (e^x, \operatorname{sen} xy)$.

b) $f(x, y, z) = (x - y, y + z)$.

c) $f(x, y) = (x + y, x - y, xy)$.

d) $f(x, y, z) = (x + z, y - 5z, x - y)$.

9. ¿Dónde corta el eje z al plano tangente a $z = e^{x-y}$ en $(1, 1, 1)$?

10. ¿Por qué deben llamarse «tangentes» en $(0, 0)$ las gráficas de $f(x, y) = x^2 + y^2$ y de $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$?

11. Sea $f(x, y) = e^{xy}$. Demostrar que $x(\partial f/\partial x) = y(\partial f/\partial y)$.

12. Utilizar la aproximación lineal para aproximar una función adecuada $f(x, y)$ y a partir de ella estimar:

a) $(0{,}99e^{0{,}02})^8$.

b) $(0{,}99)^3 + (2{,}01)^3 - 6(0{,}99)(2{,}01)$.

c) $\sqrt{(4{,}01)^2 + (3{,}98)^2 + (2{,}02)^2}$.

13. Calcular el gradiente de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x, y, z) = x\exp(-x^2 - y^2 - z^2)$ (Nótese que $\exp u = e^u$.)

b) $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

c) $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$.

14. Hallar el plano tangente en $(1, 0, 1)$ para cada una de las funciones del Ejercicio 13.

15. Hallar la ecuación del plano tangente a $z = x^2 + 2y^3$ en $(1, 1, 3)$.

16. Calcular $\nabla h(1, 1, 1)$ si $h(x, y, z) = (x + z)e^{x-y}$.

17. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Calcular $\nabla f(0, 0, 1)$.

18. Evaluar el gradiente de $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ en $(1, 0, 1)$.

19. Describir todas las funciones continuas Hölder con $\alpha > 1$ (*véase* el Ejercicio 25, Sección 2.2). [INDICACIÓN: ¿Cuál es la derivada de una función de este tipo?]

20. Supóngase que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal. ¿Cuál es la derivada de f?

2.4. Introducción a trayectorias y curvas

Introducimos en esta sección algunos de los métodos básicos de la geometría y del cálculo de trayectorias en el plano y en el espacio. Serán éstos un ingrediente importante de la regla de la cadena que se trata en la sección siguiente. Volveremos a estudiar más propiedades de las trayectorias en el Capítulo 4.

Trayectorias y curvas

A menudo imaginamos una curva como una línea trazada en un papel, como una línea recta, una circunferencia o una sinusoide. Es útil imaginar matemáticamente una curva C como el conjunto de valores de una función que lleva un intervalo de números reales en el plano o en el espacio. Llamaremos a una aplicación de este tipo una ***trayectoria***. Normalmente denotaremos una trayectoria por $\mathbf{c}$. La imagen C de un camino coincide entonces con la curva que vemos en el papel (*véase* la Figura 2.4.1). A menudo representamos por t la variable independiente y la imaginamos como el *tiempo*, de forma que $\mathbf{c}(t)$ es la posición en el instante t de una partícula en movimiento, que ***traza*** una curva al variar t. Decimos también que $\mathbf{c}$ ***parametriza*** a C. Estrictamente hablando debemos distinguir entre $\mathbf{c}(t)$ como *punto* del espacio y como vector con base en el origen.

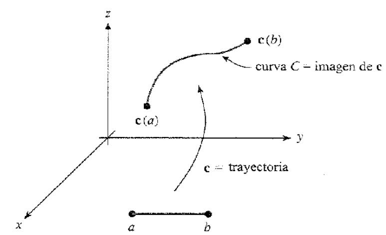


Figura 2.4.1. La aplicación **c** es la trayectoria; su imagen C es la curva que «vemos».

EJEMPLO 2.32 La recta L en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) con la dirección del vector $\mathbf{v}$ es la imagen de la trayectoria

$$\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$$

con $t \in \mathbb{R}$ (*véase* la Figura 2.4.2). Por tanto, nuestra noción de curva incluye las rectas como casos especiales.

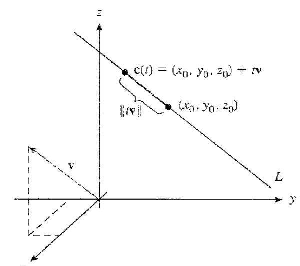


Figura 2.4.2. L es la recta del espacio que pasa por (x_0, y_0, z_0) con dirección $\mathbf{v}$; su ecuación es $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$.